Programme Algèbre II

I. Les matrices :
- → Généralités
- → Le rang d'une matrice
- → Méthode de pivot de Gauss.
- → Résolution des systèmes linéaires
- → Détermination de la matrice inverse.

II. Notions sur les déterminants
- → Déterminant dans le plan et intéprétation géométrique.
- → Déterminant dans l'espace et intérprétation géométrique.
- → Déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- → Calcul de l'inverse d'une martrise carrée
- → Résolution d'un système de Gramer.

III. Réduction d'un endomorphisme et diagonalisation

IV. Polynomes et fractions rationelles.
- → polynômes réels et complexes
- → Division euclidienne, PGCD, PPCM.
- → Fonction ou polynômes et Dévisibilité.
- → Poynômes irréductibles et factorisation.
- → Éequations algébriques
- → Fractions rationelles.

V. Notions de géométrie euclidicleme
- → Espaces vectoriels euclidiens
- → Matrices aurthogonales.

Scanned by CamScanner

Chap I : Les Matrices

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Calcul matriciel :

1. L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$:

Déf 1 : Soient n, p deux entiers naturels non nuls on appelle matrice de Format (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille $(m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

On la note en géméal par,

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$$

et dont la représentation

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de format (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté par $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque : on peut considérer une matrice (m_{ij}) comme une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

c'à d : $(i,j) \longmapsto m_{i,j}$

Déf 2 : (1) Lorsque $n = p$, on dit que la matrice est carrée. et on note $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$

(2) Lorsque $n = 1$, on dit qu'on a une matrice ligne $(m_{1,1}\ m_{1,2}, \ldots, m_{1,p})$

(3) Lorsque $p = 1$, on dit qu'on a une matrice colonne.

Scanned by CamScanner

(4) Lorsque M est carrée et que $m_{ij} = 0$ dés qu'on a une matrice triangulaire Supérieure $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(5) Lorsque M est carrée et que $m_{ij} = 0$ dès que $i < j$. on dit que M est triangulaire Supérieure. ex : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(6) Lorsque M est carrée et que $m_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, on dit que M est diagonale.

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Somme de deux matrices :

Déf$_1$: Soient A et B deux matrices du même format (n,p).

La matrice somme de A et B : $A+B$ est la matrice de Format (n,p) dont le terme général est donné par : $(C = A+B)$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] : \quad C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ex : (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 8 & 5 \\ -7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

$A+B$ n'est pas définie.

Déf$_2$: On appelle matrice nulle, qu'on note par $0 = 0_{n,p}$ de format (n,p), la matrice telle que $m_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

Scanned by CamScanner

$$O_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n \text{ lignes} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

n colonne

- On appelle matrice opposée de $M = (m_{ij})$, la matrice qu'on note par $-M = (-m_{i,j})$

- Remarque : $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

3. Matrice $\lambda . M$:

Déf : Si $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

on note $\lambda . M$ la matrice du terme général λm_{ij}

$$\lambda . M = (\lambda m_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Ex :
$$-2 \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 \\ -2 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

- Remarques : on a les propriétés suivantes :

- $1 . M = M$
- $\lambda (M + M') = \lambda M + \lambda M'$
- $(\lambda + \mu) M = \lambda M + \mu M \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K})$
- $\lambda (\mu M) = (\lambda . \mu) . M$

C'à d $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectorielle

4. Base Canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$:

Déf : on appelle matrice élémentaire toute matrice élémentaire, toute matrice dont les coefficients sont tous nuls sauf un seul que vaut 1.

Si $m_{i,j} = 1$ on la note par E_{ij}.

Donc (m_{ij}) telle que $m_{ij} = \delta_i \times \delta_{j,l}$

Scanned by CamScanner

(où δ désigne le symbôle de Kronecker)

→ Dans $M_{3,2}$, on dénombre 6 matrices élémentaires

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Théorème :** Dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est une base.

elle s'appelle la base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

• **preuve :** La famille est libre.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} E_{ij} = 0_{n,p}$$

implique $\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

ce qui implique que $\lambda_{i,j} = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

• **La famille est génératrice :**

$$M = (m_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{ij}$$

5. Matrice produit $A \times B$:

motivation : Soit $\begin{cases} x = ax + by \\ y = cx + dy \end{cases}$ un système

de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et Soit $\begin{cases} X = a'u + b'v \\ Y = c'u + d'v \end{cases}$ un autre système

de matrice $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

on cherche à exprimer x et y en fonction de u et v.

Scanned by CamScanner

on : $\begin{cases} x = a(a'u + b'v) + b(c'u + d'v) \\ y = c(a'u + b'v) + d(c'u + d'v) \end{cases}$

$\begin{cases} x = (aa' + bc')u + (ab' + bd')v \\ y = (ca' + dc')u + (cb' + dd')v \end{cases}$

La matrice correspondante $\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc & cb' + dd' \end{pmatrix}$

- c'est cette matrice qu'on appellera <u>matrice produit de A et B.</u>

c à d : $A \times B = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

⚠ <u>Remarque</u> :

pour pouvoir faire ce produit, il est nécessaire que A et B s'emboîtent, c à d le nombre de colonnes de A coïncide avec le nombre de lignes de B.

- <u>Exemple :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 10 \\ 31 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si on note $C = A \times B$.

$C_{1,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1}$

$C_{1,2} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1}$

$C_{1,2} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j,2}$

$C_{2,1} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j,1}$

$C_{2,2} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} + b_{j2}$

Scanned by CamScanner

Déf 1 : Soient n, p, q trois entiers naturels et soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.

on appelle matrice produit de A et B (sans et ordre) les matrices $C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ notée par : $C = A \times B$ et dont le terme général est

$$C_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k}$$

- **Théorème :** Pour trois $A, A' \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, B' \in M_{PA}(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire λ on a :
  1. $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda\, AB'$ (L à droite)
  2. $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$ (L à gauche)
  3. Si $C \in M(\mathbb{K})$: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

- **Remarques :**
  1. On notera que si $A \times B$ a un sens $B \times A$ n'on a pas en général (Sauf que si $n = p$)
  2. La k-ième colonne de $A \times B$ est le produit de A par la k-ième colonne de B.

c.à.d $A \times (B_1 | B_2 | \dots | B_q) = (A \times B_1 | A \times B_2 | \dots | A \times B_q)$

où B_k représente la k-ième colonne de B

- **Théorème :** Soient $E_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires alors :

$$\boxed{E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k}\, E_{i,l}}$$

Autrement dit $E_{ij} \times E_{k,e}$ est la matrice nulle si $j \neq k$

Théorème 3 : produit de matrices triangulaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux entiers carrées de Format $(n \times n)$

Scanned by CamScanner

1. Si A et B sont triangulaires Supérieurs, alors AxB aussi et de plus.

· Corollaire : (Produit de matrices diagonales) Le produit de deux matrices diagonales (de même format) est une matrice diagonale de plus son i-ème terme diagonal est le produit des i-ème termes diagramaux de A et B.

III. Matrices carreés :

Déf$_1$: une matrice carré dont une puissance est nulle est appellé nilpotente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{2,2}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2,2}$$

Donc A est nilpotente.

Déf$_2$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carreé $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ dont le terme général est $\delta_{i,j}$

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

· Théorème : Pour toute matrice carré A d'ordre n on a $A \times I_n = I_n \times A = A$

Scanned by CamScanner

(ie I_n est l'élément neutre de $\times$ dans $M_n(\mathbb{K})$.

• Remarque ⚠

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif

Dans cet anneau, on a :

$$A \times B = 0 \not\Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

• Théorème ⚠

Soient A et B deux matrices qui commutent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k \times B^{n-k}$

2. $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \times \sum_{k=0}^{n} a^k . B^{n-k}$

• Remarque :

Si $A \times B \neq B \times A$ ces formules sont Fausses

Déf 3 : (Trace d'une matrice carrée)

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle Trace de M.

La somme des éléments diagonaux

$$Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ei}$$

→ $Tr(I_n) = n$

→ $Tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\right) = 2 + 10 = 12$

• Théorème : L'application Tr est une forme linéaire $M_n(\mathbb{K})$

• Théorème : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

On a : $Tr(A \times B) = Tr(B \times A)$.

Scanned by CamScanner

III. Matrices inversibles :

Si A est un anneau, on note U_A l'ensemble des éléments inversibles.

on sait que $(U_A, \times)$ est un groupe

Déf : On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible quand il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

La matrice B est notée $B = A^{-1}$

on a B est unique et on note l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n par $GL_n(\mathbb{K})$.

(Groupe général linéaire)

Exemples :

→ I_n est inversible ($I_n \times I_n = I_n = I_n^{-1}$).

→ La matrice nulle n'est pas inversible.

($O_n \times B = 0 \neq I_n$)

→ Toute matrice A comportant une ligne nulle n'est pas inversible ($A \times B$ comportant une ligne.

→ Toute matrice A comportant une colonne nulle n'est pas inversible.

- **Théorème : (inverse de $A \times B$)**

Si A et B sont inversibles alors $A \times B$ est inversible et on a : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

- **Remarque :**

En général, la somme de deux matrices inversibles ne l'est pas :

$$I_n + (-I_n) = O_n$$

Scanned by CamScanner

• Théorème : pour qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ soit inversible, il suffit qu'elle le soit à droite ou à gauche.

càd $A \times B = I_n$

ou $B \times A = I_n$

IV. Matrices symétrique et antysmétrique :

Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle matrice transposée de A, la matrice notée par ${}^tA$ (ou A^T) de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le terme général est : $a_{ij} = a_{j,i}$

Autrement dit, la j-ième colonne de A et la j-ième ligne de A.

→ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

Rq : La transposeé est une application

$\tau_{n,p} : M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{p,n}(\mathbb{K})$.

• Théorème :

Soient A, A' dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$ ($\tau_{n,p}$ et bijective et $\tau_{n,p}^{-1} = \tau_{p,n}$)
3. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

${}^t(A \times B) = {}^At \times {}^Bt$

Rq : notons que ${}^tA \times {}^tB$ n'a pas de sens que si $n = p$.

• Corollaire :

Effectivement ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A) = {}^tI_n = I_n$.

Scanned by CamScanner

de même ${}^t(A^{-1}) \times {}^t(A \times A^{-1})$

Déf : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- on dit que $M \in M_n(\mathbb{K})$ symétrique quand ${}^tM = M$
- on dit que M est ant symétrique si ${}^tM = -M$

→ On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble unie des matrices symétriques (resp antisymétrique) d'ordre n.

Exemple :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \quad ({}^tS = S)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

on a ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -A$

$\Rightarrow A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

- **Remarque :** une matrice antisymétrique a toujours une diagonale nulle.

en effet, par définition $m_{i,j} = -m_{j,i}$

donc pour $i = j$; $m_{i,i} = -m_{ii}$

$$\Leftrightarrow m_{i,i} = 0$$

$$m_{i,i} = 0$$

- **Théorème :** $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$, et on a :

$$\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\right) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

- **Théorème :** Toute matrice carrée M s'écrit de façon unique $M = S + A$ avec S symétrique et A antisym.

en d'autres Termes $\boxed{M_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$

De plus :

$$S = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right), \quad A = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right).$$

Scanned by CamScanner

V. Systèmes linéaires $(n \times p)$

$\mathbb{K}$ est un corps qui désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1. Matrice associée à un système linéaire

Déf: On appelle système linéaire à n équations et p inconnus dans $\mathbb{K}$, tout système d'équations sous la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $(b_i)_{1 \le i \le n}$ sont des familles de scalaires.

→ Si $b_i = 0 \quad \forall 1 \le i \le n$, on dit qu'on a un système homogène.

• Remarque : un système linéaire homogène, possède toujours au moins une solution : $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{K}^p$

Par contre, un système non homogène peut ne pas avoir des solutions.

. Par exemple :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

est un système qui n'a pas de solution

Déf 2 : La famille des scalaires $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est appellée la matrices associée au système (S).

on la présente en général sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

→ Pour tenir compte des scalaires b_i . on considère aussi la matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

1.2. Interprétation géométrique :

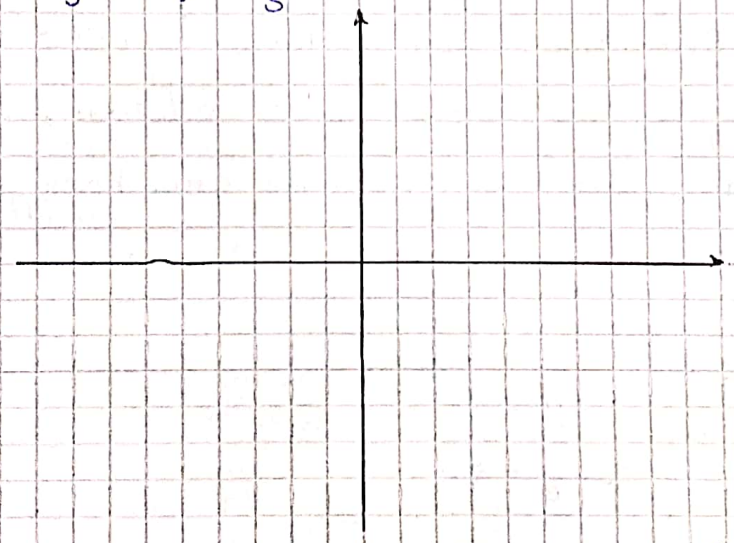
Exemples :

(1) $$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y = -3 \\ \frac{1}{5}x + y = -4/5 \end{cases}$$

(L_1) : $2x + y = 1$

(L_2) : $-x + 2y = -3$

(L_3) : $\frac{1}{5}x + y = \frac{-x}{5}$



(2) Système $(n \times 3)$ est caractérisé par l'intersection de n plan.

(un plan admet une équation sous la forme la forme $ax + by + cz = d$)

Lors de la résolution des systèmes echelonnés , on cherche à déterminer les variables principales en fct les variable

Scanned by CamScanner

secondaires).

1.3. Systèmes échelonnés :

Exemples :

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -10 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Sont des matrices de systèmes echelonnés.

Par Contre : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonné.

Déf 3 : Soit A une matrice à n lignes. On dit que A est échelonné. (en ligne) quand elle vérifie les deux conditions.

(1) Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.

(2) Si L_i est une ligne non nulle (avec $i > 1$), son premier coefficient non nul de L_{i-1}

→ On dit qu'un système est echelonné si sa matrice L'est.

. Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est échelonné.

Le système homogène associé est.

Scanned by CamScanner

$$(S)\begin{cases} 2x + z - 3t = 0 \\ z + 5t = 0 \\ 6t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Solutions } (0; y; 0; 0)$$

L'ensemble de solutions est $(S) = \{(0, y, 0, 0) / y \in \mathbb{R}\}$

$(S) = \{y(0,1,0,0) / y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}\{(0,1,0,0)\}$

$= \mathbb{K}(0,1,0,0)$.

Déf$_4$: Si A est echlonné. on appelle <u>pivots</u> de A, les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

possède 3 pivots qui sont 2 ; 1 ; 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système homogène associé est :

$$\begin{cases} x - 3y + 2t = 0 \\ z - 3t = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ z = 3t \\ x = 3y - 2t \end{cases}$$

Solutions s'écrivent : $(3y - 2t ; y ; 3t, t, 0)$

qu'on peut écrire : $(3y, y, 0, 0, 0)$

$+ (-2t, 0, 3t, t, 0)$

Scanned by CamScanner

L'ensemble des solutions est :

$y(3,1,0,0,0) + t(-2,0,3,1,0)$

càd $\text{vect}\{(3,1,0,0,0) + (-2,0,3,1,0)\}$

II. Opérations élémentaires sur les lignes :

1. Dilatations élémentaires sur les lignes :

Soit (S) un système linéaire on peut considéré le système (S') identique à (S) sauf sa i-ème ligne qui est obtenue en multipliant la i-ème ligne de (S) par $\alpha \neq 0$

Exemple :

$$(S) \begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x-10y-4z=8 \end{cases}$$

On multiple L_2 par $\frac{1}{2}\alpha$ on obtéent :

$$(S') : \begin{cases} x+2y-4z=1 \\ x-5y+2z=4 \end{cases}$$

→ Cette opération consiste à remplacer L_i par αL_i on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$ $(\alpha \in \mathbb{K}^*)$

2. Transvections $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Etant donné un système linéaire (S), on peut considérer le Système (S') identique à (S) sauf sa i-ème ligne L_i qui est obtenue en remplaçant L_i par $L_i + \alpha L_j$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $j \neq i$

- Exemple :

$$(S) \begin{cases} x+2y-4z=1 & : L_1 \\ 2x+3y-z=5 & : L_2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

L_i qui est obtenue, en remplaçant L_i par $L_i + \alpha L_j$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $j \neq i$

- Exemple :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 & L_1 \\ 2x + 3y - z = 5 & L_2 \end{cases}$$

$$(S') : \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 & L_1 \\ -y + 7z = 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

3. permutations : $L_i \leftarrow L_j$. on considère le système (S) On peut considérer le système (S') identique à (S) mais dans lequel on a échangé la i-ème ligne et la j-ième ligne.

- Exemple : $(S') \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

on échange L_1 avec L_2 $(L_1 \leftrightarrow L_2)$

$$(S') \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

→ Cette opération s'appelle permutation $(L_i \leftrightarrow L_j)$

4. <u>Méthode du pivot</u> :

On Sait résoudre les systèmes échelonés L'Algorithme de pivot de gauss permet de s'y ramener

- <u>théorème</u> : Soit (S) un système linéaire $n \times p$, Après un certain nombre d'opérations élémentaires sur les lignes, le système (S) est équivalent à un système échelonné

- Exemple : Considérons $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

Opérations	Résultat obtenue	but cherché
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	avoir $m_{1,1} \neq 0$
$L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 5 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$	annuler $m_{1,3}$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{14}{3} L_2$	$\left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -14/3 \end{array}\right)$	annuler $m_{3,2}$

Au final, on obtient un système échelonné équivalent au système initial et sa résolution devient facile.

- Résolution d'un système linéaire homogène :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $X = (x_1, x_2 \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. $AX = 0$ (0 vecteur nul colonne). est un système linéaire homogène associé à la matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

- Déf : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée (en lignes).

Notons : $j_1, j_2, \ldots, j_r$ les numéros des colonnes de ces pivots.

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ désigne le p-uplets inconnu de système homogène associé à A.

- On dit que $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_p}$ sont des inconnues principales.
- Les autres inconnues secondaires.
- Exemple :

$$(S') \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 0 \\ z + 5t - u = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

→ Les inconnues principales sont : x, z, u.

• **Théorème :**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice échelonné homogène. On note r le nombre de pivots.

Si on fixe arbitrairement les valeurs de $(p-r)$ vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_{p-r}$ dans $\mathbb{K}^p$ telles que solutions du système homogène s'écrive de façon unique

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{p-r} X_{p-r}$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Ainsi l'ensemble de solutions du système homogène est : $\text{Vect}\{X_1, X_2, \ldots, X_{p-r}\}$

→ En conséquence, dés que $p-r \geq 1$ (càd $p > r$) il y a une infinité de solutions à $A^t X = 0$

→ Si $r \leq p$ la solution est est $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^T$

• **Vocabulaire :**

(1) on dit que la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-r})$ est une base de solutions. On dit aussi que l'ensemble des solutions et de dimension $(p-r)$.

(2) inconnues secondaires permettant donc de permettre toutes les solutions. On les appelle parfois les paramétres du système.

• **Exemples :**

$$(S') \begin{cases} x + 2y + 3z + 8t = 0 \\ z + 5t - u = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

→ Inconnues principales = x, z, u

→ Inconnes secondaires = y et t.

Scanned by CamScanner

On exprime x, z et u en fonction de y et t

$u = 0$; $z = -5t$, $x = -2y + 7t$ des solutions sont les S-uplets

$$(-2y + 7t ; y = -5t ; t ; 0) = y(-2, 1, 0, 0, 0) + t(7, 0; -5, 1, 0)$$

L'ensemble des solutions est le sous espace vectoriel engardré par les vecteurs.

$X_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $X_2 = (7, 0, -5, 1, 0)$

→ rang : 3

→ Dimention : 2.

* Résolution d'un système complet :

Théorèmes : Soit (S) un système linéaire $(n \times p)$ et (S_1) son système homogène associé.

Si (S) possède une solution particulière X_{partie} Toutes les solutions sont exactement les p-uplets de la forme.

$$X_{partie} + (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{p-r} X_{p-r})$$

et l'ensemble des solutions est

$$X_{partie} + Vect(X_1, X_2, \dots, X_{p-r})$$

Déf : un système linéaire qui n'a pas de solution est appellé incompatible

Dans le cas contraire : Compatible.

. Conclusion : un système linéaire (S) $n \times p$ comportant r pivots peut :

+ n'avoir aucune solution
* Avoir une unique solution $(p = r)$ et si de plus on a $n = p$, on dit que le système est de Gamer.

Scanned by CamScanner

avoir une infinité de solutions, cela n'est possible que si $r < p$

→ Vocabulaire :

l'entier r s'appelle le rang du système (S).

- Corollaire : Un système linéaire $n \times n$ possède une unique solution si et seulement s'il possède n pivots.

- Exercice :

Scanned by CamScanner

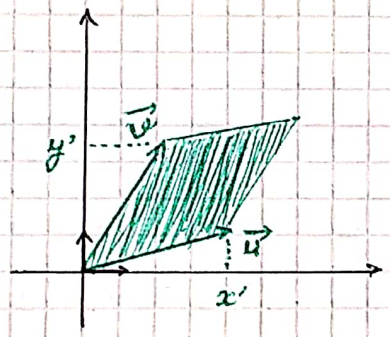
Déterminants

I. Formes p-linéaires alternées sur un espace vectoriel.

1. Motivation géométrique :

étant donnés deux vecteurs géométriques $\vec{v}, \vec{u}$ du plan , on s'adresse à "l'aire orienté $\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v})$ qui décrit - gramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on le plan d'un repère orthogonal direct, et on note :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$



grace à un décompage de surfaces, on constate que :

$\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v}) = |xy' - yx'| =$

qu'on peut écrire $\left|\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right|$

Elle écriture nous permet de voir que :

$\mathcal{A}(\vec{u}+\lambda\vec{v}, \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{u},\vec{v}) + \lambda\,\mathcal{A}($

et $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}+\lambda\vec{v}') = \mathcal{A}(\vec{u},\vec{v}) + \lambda \cdot \mathcal{A}$

On dit que $\mathcal{A}$ est une forme bilinéaire

enfin, on a :

$\mathcal{A}(\vec{u},\vec{u}) = 0$

On dit que $\mathcal{A}$ est alterné.

• Remarque : Dans l'espace, On pourrait définir de la même façon le volume du parallèpipède

Scanned by CamScanner

engendré par $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ noté : v
(appelé produit mixte) et on a : v est Trilinéaire.
$((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \longrightarrow v(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$
forme trilinéaire

2. Cas général :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et et $p \in \mathbb{N}^*$.

Déf$_1$: On appelle forme p-linéaire sur E, toute application

$$f : E^p \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x_1, \ldots, x_p) \longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

qui est linéaire par rapport à chacune des p-variables.

• Remarque : Pour $p=1$, on retrouve la définition d'une application linéaire.

• Exemple :

Le produit mixte est une forme 3-linéaire (Trilinéaire) sur $\overrightarrow{E}$ des vecteurs de l'espace.

Déf$_2$: Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire sur E

(1) On dit que f est symétrique Si :

$$(\forall \sigma \in S_p)\ f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})) = f((x_1, x_2 \ldots x_p))$$

càd l'ordre des variables n'a pas d'importance.

(2) On dit que f est antisymétrique. Si :

$$(\forall \sigma \in S_p)\ f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})) = \varepsilon_\sigma \cdot f((x_1, x_2 \ldots, x_p))$$

où ε_σ : la signature de σ

(3) On dit que f est alternée quand elle s'annulle dès que deux de ses variables sont égales.

• Exemples :

• Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique.

Scanned by CamScanner

• Le produit mixte

$$\vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \longrightarrow \vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w}) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

est une forme trilinéaire alternée car $([\vec{u},\vec{v},\vec{w}])$ dés que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont Coplanaires a fonction deux d'entre eux sont égaux.

• Dire qu'une forme bilinéaire.

$$f : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

est antisymétrique c'est simplement

$\forall (x,y) \in E^2 : \quad f((x,y)) = -f((y,x))$

⚠ Théorème : Une forme p-linéaire est antisymétrique si elle est alternée.

Notation : On note $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées (ou antisymétriques) sur E.

• preuve (Th_1) :

Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme antisymétrique.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I$ dans lequel deux vecteurs $x_i = x_j$ (i et j) on aura :

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots x_j, \ldots, x_p)) =$$

$$-f((x_1 x_2, \ldots, x_j, \ldots x_i, \ldots, x_p)) =$$

$$-f((x_1, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p))$$

$$\Rightarrow 2f((x_1, x_2, \ldots, x_j)) = 0$$

D'ou $f((x_1, x_2, \ldots, x_p)) = 0$

• Réciproquement : Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme alternée et Soient $i \neq j$ dans $[\![1, p]\!]$.

Scanned by CamScanner

Par hypothèse : $f((x_1, x_2, \dots, x_i, x_j \dots x_j, x_i \dots, x_p))$

$= f((x_1, x_2, \dots, x_i, x_j, \dots x_p)) + f((x_1, x_2, \dots \overset{=0}{x_i - x_i} \dots x_p)$

$+ f((x_1, x_2, \dots, x_j, x_j, \dots, x_p)) + f((x_1, x_1 \dots x_j, x_i \dots x_p))$

$\overset{=0}{0}$

$\Rightarrow f((x_1, x_2, \dots, x_j, x_i, \dots x_p)) = -f((x_1, x_2 \dots x_i x_j \dots x_p))$

Ainsi, on a montré que pour toute transposition $\tau \in S_p$

$f((x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(p)})) = -f((x_1, x_2, \dots, x_p))$

Si $\sigma \in S_p$, une permutation quelconque, on sait qu'elle se décompose en Transposition $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$

Donc : $f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})) = (-1)^k f(x_1, x_2, \dots, x_p)$

$= \varepsilon_\sigma . f(x_1, x_2 \dots, x_p)$

D'ou f est antisymétrique.

⚠ Remarque : Le théorème, n'est valable que si : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Théorème$_2$: $A_p(E)$ est un sous-espace vectoriel de $f_v(E^p, \mathbb{K})$

3. Cas où E est de dimension finie et p = dim (E) :

Dans ce photographe E désigne un espace-vectoriel de dimension fini $n \in \mathbb{N}^*$

- Théorème 3 : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

Si $f \in A_n(E)$, alors pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ =

On a :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1),1}, \dots, x_{\sigma(n),n} \right) \cdot f((e_1, e_2, \dots, e_n)).$$

où $x_{i,j}$ est la i-ème coordonnée du j-ème de la base e_j.

Scanned by CamScanner

• Exemple : $n = 2$.

E est un e.v de dim $= 2$ dont une base est (e_1, e_2)

pour tout $x_1, x_2 \in E$

$x_1 = x_{1,1}\, e_1 + x_{1,2}\, e_2$

$x_2 = x_{2,1}\, e_1 + x_{2,2}\, e_2$

Si $f \in \mathcal{A}_2(E)$, on a :

$$f((x_1, x_2)) = f((x_{1,1} e_1 + x_{1,2} e_2 + x_{2,1} e_1 + x_{2,2} e_2))$$
$$= x_{1,1}\, x_{2,1}\, f((e_1, e_1)) + x_{2,1}\, x_{2,2}\, f((e_2, e_2))$$
$$+ x_{1,2}\, x_{2,1}\, f((e_2, e_1)) + x_{1,2}\, x_{2,2}\, f((e_2, e_2))$$
$$= x_{1,1}\, x_{2,2}\, f((e_1, e_2)) + x_{1,2}\, x_{2,1}\, f(e_2, e_1)$$

puisque $S_2 = \{Id, \tau\}$

• <u>preuve</u> : puisque f est n-linéaire, on peut écrire :

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_1,1} \dots x_{i_n,n}$$

Comme f est alternée, cette somme se réduit à

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1} x_{i_1,1} \dots x_{i_n,1} \cdot f(e_{i_1}, \dots e_{i_n})$$

autrement dit :

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1),1}, x_{\sigma(2),2}, \dots, x_{\sigma(n),n} \cdot f((e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}))$$

or f est alternée. donc :

$$f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma \cdot f((e_1, e_2, \dots, e_n))$$

d'où le resultat.

<u>Corollaire</u> : Si $\dim(E) = n$, l'espace $\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle.

• Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, un élément

Scanned by CamScanner

non nul de $\Lambda_n(E)$ est :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma \cdot x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

• Cette application constitue une base de $\Lambda_n(E)$.

• Preuve : Il suffit de montrer que :

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

est une forme n-linéaire, alternée non nulle.

(car toute forme n-linéaire alternée est proportionelle Th₂).

→ La n-linéarité est manifeste, Quand à l'aspect alterné :

Soit $s \in S_n$ une permutation.

Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$

$$f(x_{\sigma(1),1}, \ldots, x_{\sigma(n),n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \cdot x_{\sigma(s(1)),1} \cdots x_{\sigma(s(n)),n}$$

or l'application, $\sigma \longmapsto \sigma_{os}$ est bijective de S_n dans S_n dans S_n, dont la réciproque est : l'application $u \longrightarrow u_o s^{-1}$

Par le changement de variable $u = \sigma o s$, on a :

$$f((x_{s(1),1}, x_{s(2),2}, \ldots, x_{s(n),n})) = \sum_{u \in S_n} \varepsilon_{us^{-1}} x_{u(1),1} \cdots x_{u(n),n}$$

$$\sum_{u \in S_n} \varepsilon_u \varepsilon_s x_{u(1),1} \cdots x_{u(n),n} = \varepsilon_s \cdot \sum_{u \in S_n} \varepsilon_u x_{u(1),1} \cdots x_{u(n),n}$$

$$= \varepsilon_s \cdot f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

→ Ce qui prouve que f est <u>alternée</u>.

Enfin f est non nulle, Car : $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$

Donc $f((e_1, e_2, \ldots, e_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{\sigma(1),1} \cdots \delta_{\sigma(n),n}$

où $\delta_{i,j}$ = Symbôle de Kronecker

or $\delta_{\sigma(1),1} \cdots \delta_{\sigma(n),n} = 0$.

Scanned by CamScanner

Sauf, quand $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=2$, $\sigma(n)=n$ càd $\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$

Donc $f((e_1, e_2, \ldots, e_n)) = 1 \neq 0$

Déf$_1$: Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim n, on appelle forme volume, toute forme n-linéaire alternée non nulle.

• Remarques :

→ Deux formes volumes sur un même espace vectoriel E sont toujours proportionnelles

→ l'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}_p(E)$ est un espace vectoriel de dim $= n^p$

→ Si $p > n$: $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$

→ Si $p \in [\![1,n]\!]$; $\mathcal{A}_p(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}_v(E^p, \mathbb{K})$ de dimension C_n^p.

II. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base :

Nous généralisons ici la notion d'aire orienté $\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v})$

1. Définitions et propriété fondamentale.

Déf$_1$: Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.

On appelle déterminant dans $\mathcal{B}$ la forme n-linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}}$ définie par :

$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

• Remarque :

$\det_{\mathcal{B}}((e_1, e_2, \ldots, e_n)) = 1$

• Théorème$_1$: (Changement de base)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Scanned by CamScanner

• Preuve : On sait que $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}}$ sont proportionelles, puisque $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1. donc, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que :

$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$.

en particulier, en prenant les vecteurs de $\mathcal{B}$, on a :

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = k \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = k \times 1 = k$

• Théorème :

Soit $\mathcal{B}$ une base de E une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$$

• Preuve : Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base, on sait qu'elle est libre, ainsi si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'est pas une base, alors elle n'est pas libre

Donc, il existe un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Donc $\det_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$

car $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée.

• Réciproquement : Supposons $\mathcal{E} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont une base.

Les éléments $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{E}}$ sont deux éléments de $\mathcal{A}_n(E)$ qui est de dimension 1,

$(\exists k \in \mathbb{K}^*) / \det_{\mathcal{B}} = k \det_{\mathcal{E}}$

Donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)$

$= k \times 1$

$= k \neq 0$

Scanned by CamScanner

2. Interprétation géométrique :

(cas $n = 2$ ou $n = 3$)

Dans le cas : $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique

$K_2 = \left((1,0) ; (0,1)\right)$

Soit $x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\det_{K_2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xy' - yx'$$

C'est l'aire orienté du parallelogramme engendré par (x, y) et (x', y')

. Dans $E = \mathbb{R}^3$, muni de la base canonique :

$$K_{3,1} = \left((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\right)$$

$$\det_{K_3}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$= xyz'' + x'y''z + yz'x'' - x''y'z - x'yz'' - z'y''x$$

(Règle de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{vmatrix}$$

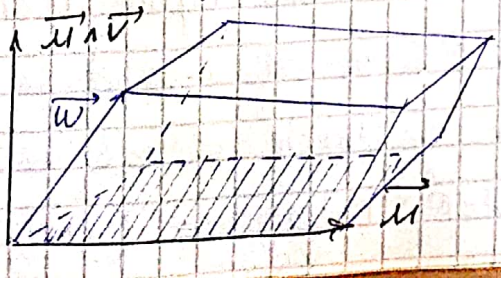
$$= (xy'z'' + x'y''z + x''yz') - (zy'x'' + z'y''x + z''yx')$$

$$= x(y'z'' - y''z') - y(x'z'' - x''z') + z(x'y'' - x''y)$$

$$= x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

• Interprétation géométrique :

$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ = volume de parallelepipède formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$



Scanned by CamScanner

On a $V = A \times h$ avec $A = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme de base et $h = \|\vec{w}\| \cdot |\cos(\alpha)|$ et $\alpha = (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w})$

On a donc $V = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \times \|\vec{w}\| \times |\cos(\alpha)|$

$= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

3. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finé =

Déf. Soient e, e' deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finé $n > 0$.

puisque e' est libre - alors $\det_e(e') \neq 0$

1. Si $\det_e(e') > 0$, on dit que e et e' ont la même orientation
2. Si $\det_e(e') < 0$, on dit que e élément des orientations opposées.

. **Théorème :** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > a$. la relation $e \sim e' \Leftrightarrow \det_e(e') > 0$, est une relation d'équivalence.

→ De plus, il nya que deux classes, ainsi il nya que deux façons d'orienter une droite un plan. n'importe quel espace.

Déf 2 : On appelle relation orientation sur E, une des deux classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $\sim$.

→ c'est donc un ensemble de bases.

→ Si w est une orientation de E, le couple (E, w), s'appelle un espace vectoriel orienté.

→ Si $e \in w$ est une base de E on dit que :

. e directe si $e \in w$

. e rétrograde (indirecte) si $e \notin w$.

Scanned by CamScanner

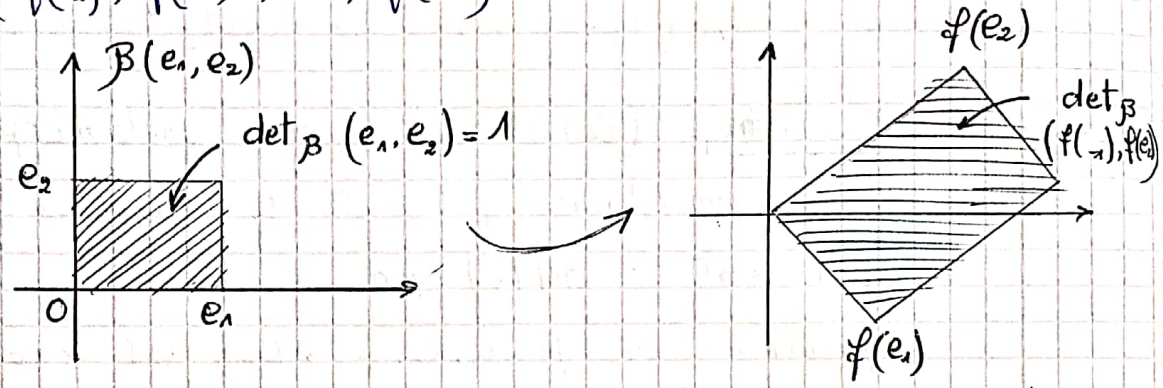
3. Déterminant d'un endomorphisme :

Déf 1 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et u une application de E dans F. On dit que u est linéaire ou (un morphisme). Si et seulement si :

$$(\forall x, y \in E)\ (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K})\quad u(\lambda x + \mu y)$$

→ Lorsque : $E = F$, un morphisme de E dans lui même s'appelle endomorphisme

→ Si f un endomorphisme de E, il transforme toute base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E en une famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ de n vecteurs.



par définition, le rapport entre $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2))$ et $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2)$ est $\det(f)$.

Théorème et définition : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est indépendant de choix de $\mathcal{B}$.

Il existe = $\det(f)$

- **preuve :** l'application $\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ est une forme n-linéaire puisque : $\det_{\mathcal{B}}$ et n-linéaire. Elle est aussi alternée. Donc elle est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = k \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Scanned by CamScanner

En evaluant sur les vecteurs $\det_{\mathcal{B}}$, on trouve que :

$k = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$

En évaluant sur les vecteurs $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = \mathcal{B}'$.

on a $\det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

or $\det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}}(f(e'_1), \ldots f(e'_n))$

(Formule de gt de base)

Puisque $\mathcal{B}$ est une base, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$

Il vient après simplification que $\det_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), \ldots, f(e'_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots f(e_n))$

- **Théorème 2 :** Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On a $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f) \times \det(x_1, x_2, \ldots x_n)$

- **Corollaire 1 :** (caractérisation des endomorphismes)

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$

- preuve : Si $\mathcal{B}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ par définition

Ainsi $\det f \neq 0$, si $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de E.

Ce qui equivaut à $f \in Gl(E)$

- **Corollaire 2 :** (déterminant d'une composée)

Soit f et g deux endomorphismes de E on a :

$\det(fog) = \det f \times \det(g)$

- preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E on a :

$$\begin{aligned}\det(fog) &= \det_{\mathcal{B}}(fog(e_1), \ldots, fog(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \ldots, f(g(e_n))) \\ &= \det(f) \times \det(g(e_1), \ldots, g(e_n)) \\ &= \det(f) \times \det(g) \times \det(\mathcal{B}) = \det(f) \times \det(g)\end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

• Corollaire 3 : (Déterminant de la réciproque)

Si $f \in Gl(E)$, alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$

. preuve : $\det(f)$

Ainsi en particulier.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

• Remarque : notons $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ les colonnes de la matrice M que l'on considère comme des éléments de $\mathbb{K}^n$

Si $\mathbb{K}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On a donc $\det(M) = \det_{\mathbb{K}_n}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

C'est aussi $\det(u_H)$

Scanned by CamScanner

Où $u_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme associé à M.

• **Théorème :** (premières propriétés)

L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ possède les propriétés suivantes :

(1) Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul

(2) Le déterminant d'une matrice comportant au moins une colonne nulle est nul.

(3) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $M \in M_n(\mathbb{K})$

$\det(\lambda M) = \lambda^n . \det(M)$

• **Remarque :** La propriété montre que det n'est pas linéaire par rapport à M. (Mais seulement par rapport aux colonnes).

• De plus $\det(M+N) \neq \det(M) + \det(N)$

• **Théorème :** (Déterminant d'un produit)

Pour toutes matrices $M, N \in M_n(\mathbb{K})$

$\det(M \times N) = \det(M) \times \det(N)$

• **Preuve :** $\det(M \times N) = \det(u_M \times u_N)$

$= \det(u_M) \times \det(u_N)$

$= \det(M) \times \det(N)$

• Corollaire : (Déterminant de l'inverse)

Une matrice carrée M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et on a : $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$

• **preuve :** M est inversible si et seulement si son application canonique associée u_M est bijective.

On a vu que c'était le cas si et seulement si $\det(u_M) \neq 0$ càd $\det(M) \neq 0$

Enfin si M est invesible $\det(M) \times \det(M') = \det(M \times M')$

Scanned by CamScanner

$= \det(I_n) = 1.$

càd $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$

• **Théorème :** (déterminant de ${}^tM$)

pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$.

$\det({}^tM) = \det(M)$

• **preuve :** Par définition ;

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n}$$

donc $$\det({}^tM) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n}$$

or l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_n dans S_n. Par un chgt de variable.

on a : $$\det(M) = \sum_{s \in S_n} \varepsilon_{s^{-1}} m_{s(1),1} \cdots m_{s(n),n}$$

$$= \sum_{s \in S_n} \varepsilon_s m_{s(1),1} \cdots m_{s(n),n}$$

$= \det(M)$. (car $\varepsilon_{s^{-1}} = \varepsilon_s$)

4.2. Opérations élémentaires sur les colonnes :

Comme l'appl $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \mapsto \det_{M_n}(c_1, c_2, \ldots c_n) = \det(M)$ est n-linéaire et alternée

On peut dire :

* Multiplier une colonne par λ, multiplier le déterminant par λ.
* Permuter deux colonnes, multiplie le déterminant par -1.

• **Théorème** (Invariance par transection)

le déterminant est unchangé si on remplace l'une de ses colonnes C_i par $C_i + \lambda C_j$ $(i \neq j \in [1,n])$

Scanned by CamScanner

• preuve :

On développe par rapport à la i-ième colonne, on obtient deux déterminants donc l'un possède deux colonnes identiques, il est nul.

4-3. Déterminant en Blocs :

Théorème : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée se présentant sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ avec A et C sont deux matrices carrées :

alors :

$$\det(M) = \det(A) \times \det(C)$$

preuve : À titre d'exercice.

• Cas particuliers :

Le résultat du dernier théorème s'élend pour des matrices se présentant en Blocs triangulaires

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_n \end{vmatrix} = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n| = \prod_{i=1}^{K} \det(A_i)$$

(A_i sont des des matrices carrés)

• Corollaire :

Le déterminant d'une matrices triangulaire (supérieur ou inférieur) est le produit de ses éléments diagonaux.

→ En particulier, on retrouve le fait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

4.4. Développement par rapport à une range :

Déf : Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$

on appelle mineur relatif à la place (i,j) de M.

Scanned by CamScanner

le déterminant obtenu en enlevant à M la i-ème ligne et la j-ième colonne.

On le note : $D_{i,j}$.

• Exemple :

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 3^{ème} \text{ ligne}$$

3ème colonne

$$D_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Soit j_0 un indice de colonne particulière, on a :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} m_{i,j_0} D_{i,j_0}$$

• Exemple :

① $$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(D) = (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(16+6) + 7(12+3) = 149.$$

② $$E = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 4 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 5 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -8 - 72 + 65 = -15.$$

• Remarque : Il ne faut jamais développer aussi brutalement un déterminant sous l'avoir transformé par transvection.

Scanned by CamScanner

par exemple :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$

$C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4.5. Comatrice :

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On rappelle que le mineur de place (i,j) est le déterminant noté $D_{i,j}$ en enlevant la $i^{ème}$ ligne et la j-ème colonne et on a :

$$\text{Det}(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{i+j} D_{i,j} \quad \text{où} \quad j \in [\![1, n]\!]$$

- Déf : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$
  - le nombre : $(-1)^{i+j} D_{ij}$ s'appelle le Cofacteur de place (i,j)
  - La matrice $\left((-1)^{i+j} D_{ij}\right)_{1 \leq ij \leq n}$ s'appelle la Comatrice de M, On la note $Com(M)$

- Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$D_{1,1} = d$; $D_{1,2} = c$

$D_{2,1} = b$; $D_{2,2} = a$

Donc $Com(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 \quad ; \quad D_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_{2,1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \quad ; \quad D_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{3,1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad D_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$D_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

$$Com(M) = \begin{pmatrix} -12 & 6 & -8 \\ 7 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Remarque :

→ Dans le 1er exemple :

$$M \times {}^t(Com(M)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc)\, I_2 = \det_{(M)} I_2$$

- Si $\det(M) \neq 0$, $M \in GL_n(\mathbb{K})$ et M est inversible

$$M^{-1}.M \times {}^t Com(M) = \det(M).M^{-1}$$

$$\Rightarrow {}^t Com(M) = \det(M) \times M^{-1}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot {}^t(Com(M)).$$

- Théorème :

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$

$$M \times {}^t(Com(M)) = \det(M) \cdot I_n$$

Scanned by CamScanner

- **Corollaire** :

Pour toute matrice, carrée inversible :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot {}^t\left(\mathrm{Com}(M)\right)$$

- Exemples :

(1) $n = 2$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;/\; ad - bc \neq 0$$

On a $\det(M) \neq 0$, d'où M est inversible

On a : $\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

d'où $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

(2) $n = 3$

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$, une matrice (3×3), inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot {}^t\begin{pmatrix} |A^{1,1}|, & -|A^{1,2}|, & |A^{1,3}| \\ -|A^{2,1}|, & |A^{2,2}|, & -|A^{2,3}| \\ |A^{3,1}|, & -|A^{3,2}|, & |A^{3,3}| \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|A^{1,1}|}{\det(A)}, & \frac{-|A^{1,2}|}{\det(A)}, & \frac{|A^{1,3}|}{\det(A)} \\ \frac{-|A^{2,1}|}{\det(A)}, & \frac{|A^{2,2}|}{\det(A)}, & \frac{-|A^{2,3}|}{\det(A)} \\ \frac{|A^{3,1}|}{\det(A)}, & \frac{-|A^{3,2}|}{\det(A)}, & \frac{|A^{3,3}|}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

- **Remarque** :

${}^t\left(\mathrm{Com}(M)\right)$ s'appelle aussi la matrice complémentaire de M : $\widetilde{M}$ ou adjoint de M (Si il n'y a pas de confusion)

6. Déterminant :

Déf : On appelle Matrice de Vandermonde

Scanned by CamScanner

associé à $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, la matrice carrée d'ordre

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- **Théorème :**

Quels que soit les scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

$$|V(x_0, x_1, \ldots, x_n)| = V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

. **Exemple :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i) = (b-a)(c-b)(c-a).$$

$$= (bc - b^2 - ac + ab)(c-a)$$

$$= bc^2 - b^2c - ac^2 + abc - abc + ab^2 + a^2c - a^2b.$$

$$= bc^2 - b^2c - ac^2 + ca^2 + ab^2 - a^2b.$$

7. **Résolution d'un système de Cramer :**

Déf : Un système $AX = B$ d'ordre (n, p) de rang r est dit de Cramer si et seulement si :

$$n = p = r$$

. **Théorème :** Un Système de Cramer, admet une unique solution, En particulier un système de Cramer homogène admet la suite solution trivial.

- *preuve :*

$n = p \Rightarrow A$ est carrée et puisque $rg(A) = n$ alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$, c'est à dire $\det(A) \neq 0$

Donc A est inversible

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$

Scanned by CamScanner

Ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution.

• Théorème : (S') est un système de Cramer si et seulement si :

$$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff \det(S') \neq 0.$$

→ On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A $(Ax = B)$

Théorème : (Formule de Cramer)

Soit $Ax = B$, un système de Cramer à n équatio

Soit $x_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'unique solution du Système

alors : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

où $\Delta = \det(A)$ et $\Delta_i = \det(C_1, C_2, \ldots, \underset{i}{B}, C_{i+1} \ldots C_n$

Preuve : (S) est un système de Cramer donc :

$\Delta \neq 0$

Par définition de x_0, on a : $B = \sum_{j=0}^{n} x_j C_j$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

on a : $\Delta_i = \det\left(C_1, C_2, \ldots, \sum_{j=0}^{n} x_j C_j, C_{i+1}, C_n\right)$

et si $i \neq j$

le déterminant

$\det(C_1, C_2, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) = 0$

Car on a deux colonnes sont égales (i-ème et la j-ème) Il reste $\Delta_i = x_i \Delta$

i.e : $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Scanned by CamScanner

• **Exercice :**

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système (S) :

$$\begin{cases} x+y+z=j^2 \\ x+jy+zj^2=j \\ x+j^2y+zj=1. \end{cases}$$

où $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & j-1 & j^2-1 \\ 1 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & j-1 \end{vmatrix}$$

$$=(j-1)^2-(j^2-1)^2$$

$$=j^2-2j+1-j^4+2j^2-4$$

$$=3j^2-3j=3(j^2-j) \qquad (j^4=j)$$

On a $j^2\neq j$ donc $\det(A)\neq 0$ $\qquad (j^3=1)$

alors (S) est un système de Cramer

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} j^2 & 1 & 1 \\ j & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}}{3(j^2-j)}=0$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & j^2 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & j \end{vmatrix}}{3(j^2-j)}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & j^2 & 1 \\ 1 & j^2 & j^2 \\ 1 & j & j \end{vmatrix}}{3(1-j^2)}=0$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & j^2 \\ 1 & j & j \\ 1 & j^2 & 1 \end{vmatrix}}{3(j^2-j)}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & j^2 \\ 0 & j-1 & j-j^2 \\ 0 & j^2-1 & 1-j^2 \end{vmatrix}}{3(j^2-j)}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} j-1 & j-j^2 \\ j^2-1 & 1-j^2 \end{vmatrix}}{3(j^2-j)}=\frac{(j-1)(1-j^2)-(j^2-1)(j-j^2)}{3(j^2-j)}$$

$$=(1-j^2)\frac{((j-1)+(j-j^2))}{3(j^2-j)}=\frac{(1-j^2)(2j+1-j^2)}{3(j^2-j)}\neq 0$$

Scanned by CamScanner

or $j^2 + j + 1 = 0$ donc $-j^2 = 1 + j$

$$= \frac{(1-j^2)(2j+1+1+j)}{3(j^2-j)} = \frac{(1-j)(3j+1)}{3(j^2-j)}$$

$$= \frac{(3j+1-3-j^2)}{3(j^2-j)}$$

$$= \frac{(3j-2-j^2)}{3(j^2-j)} = j^2$$

Scanned by CamScanner

Réduction des endomorphisme

I. Matrices diagonalisables :

Toutes les matrices considéreés sont des matrices carreés à n lignes et n colonnes à Coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Les vecteurs sont identifiés à des matrices à n lignes et 1 colonne.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est diagonale si tous ces coefficients en dehors de la diagonale sont nuls. $\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

→ Supposons que tous les coefficients diagonaux sont égaux à λ, Dans ce Cas A est proportionnelle à la matrice identité.

On a : $A = \lambda . I_n$

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, le vecteur Ax est proportionnel à x.

$Ax = \lambda x$

Donc multiplier le vecteur x par A, revient à multiplier x par λ.

Géométriquement, c'est effectuer une homothérie de rapport λ.

→ Supposons maintenant que les coefficients diagonaux seront quelconques. Considérons une base $(e_1, e_2, \dots e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et examinons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, de matrice A cette base
Dire que A est diagonale, c'est dire que $f(e_i) = \lambda_i e_i$

Scanned by CamScanner

Si on restrent f à la direction e_i, f est une homothérie de rapport λ_i.

→ Si $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

On a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$

• Remarque :

Les matrices diagonales sont faciles à manipuler.

• Propriétés : ⚠ ⚠

(1) Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(2) Multiplier à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier la i-ème ligne par λ_i

c'à d Si $B = (b_{ij})$ est une matrice qcq alors :

$$AB = (\lambda_i b_{ij})_{ij=1,\dots,n}$$

(3) Multiplier à droite par une matrice diagonale revient à multiplier la j-ème

$$BA = (\lambda_j b_{ij})$$

(4) Le produit de deux matrices diagonales est une matrice est une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

(5) Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls La matrice est inversible

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda_n \\ 0 & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{\lambda_n} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

(6) La puissance k-ième d'une matrice diagonale est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

→ Si $D = P^{-1}AP$

alors $PD = AP$

Mais si D est diagonale, multiplier P à droite par D, revient à multiplier les vecteurs colonnes de P par les coefficients diagonaux de D.

Notons v_i la $i^{ème}$ vecteur de P et λ_i, le i-ème coefficient diagonale de D. Pour tout $i = 1 \ldots$ on doit avoir

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda_i I)\, v_i = 0$$

On notant I, la matrice identité de dimension n.

On dit que : λ_i est une valeur propre de A et v_i est un vecteur propre associé à λ.

- Remarque :

  λ est une valeur propre de A si et seulement si le système $(A - \lambda I)\, v = 0$, admet une sol non nulle.

- Proposition : Un nombre complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifié :

  (1) $\operatorname{rg}(A - \lambda I) < n$ (2) $|A - \lambda I| = 0$

Scanned by CamScanner

• Définition : On appelle polynôme caractéristique de la matrice A et on le note $P_A(X)$ le déterminant de la matrice $A - XI$

$$\boxed{P_A(X) = \det(A - XI)}$$

donc :

$$P(u) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

on a $P_A(X)$ est la somme de produit des termes de la matrice $(A - XI)$. Chaque produit est constitué de n facteurs qui sont des termes pris dans les lignes et des colonnes différents.

→ Le terme de plus haut degré en X dans $\det(A - XI)$ provient de produit des termes qui constituent la diagonale $\prod_{i=1}^{n} (a_{i,1} - X)$

Ce qui montre que $\deg(P_A) = n$

Son terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$

→ Le terme constant est $P_A(0) = \det(A)$

c'est aussi le produit des valeurs propres (comptées avec leurs multiplicité)

$$P_A(X) \Rightarrow S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

→ Le Coefficient de X^{n-1} dans $P_A(X)$ est la somme des termes diagonaux que l'on appelle :

La Trace de A.

C'est aussi la somme des vecteurs propres de A. (comptées avec leur multiplicité).

Scanned by CamScanner

• Remarque :

(1) Comme les valeurs propres sont des racines de polynôme caractéristique, une matrice $(n \times n)$, admet au plus n valeurs propres.

(2) Pour qu'une matrice soit diagonalisable, il faut déjà que soit polynôme caractéristique admette effectivement n racines (comptes avec leur ordre de multiplicité), Donc qu'il soit Scindé (c'est toujours le cas dans $\mathbb{C}$)

(3) Si λ est une valeur propre de A, l'ensemble des valeurs v tel que $(A - \lambda I)v = 0$ est un sous-espace vectoriel.

→ Par définition, il contient le vecteur nul et tous les vecteurs propres de A associés à λ on l'appelle, le sous-espace propre associé à λ : E_λ

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

• Déf : Soit λ une valeur propre de A. On appelle sous-espace propre associé à λ.
l'espace vectoriel $\{ v \in \mathbb{R}^n / Av = \lambda v \}$

• Théorème : Soit A une matrice dont le polynôme caractéristique $P_A(x)$ est Scindé. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les racines de $P_A(x)$ est $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les racines de $P_A(x)$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ leur ordre de multiplicité respectives $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$

La matrice A est diagonalisable si et seulement si pourtant $i = 1, 2, \ldots, k$ Le sous espace propre $E_{\lambda i}$ est de dimension m. $(\dim(E_{\lambda_i}) = m_i)$

Scanned by CamScanner

càd : $\dim\left(\ker(A-\lambda_i I)\right) = m_i$

• Preuve :

Remarquons qu'un même vecteur propre, Par Conséquant deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes ont une intersection réduite au vecteur nul. (càd les sous espaces propres sont en somme directe)

ie $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} = \mathbb{R}^n$

→ Supposons que A est diagonalisable $P^{-1}.A.P = D$

Mais aussi $P^{-1}(A - XI)P = D - XI$ or :

$\det(A - XI) = \det(D - XI)$

ce qui veut dire que le polynôme Caractéristique de A est celui de D.

Donc $P_A(X) = P_D(X) = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$

or le polynôme caractéristique de D est le produit des termes diagonaux, cela signifie que pour tout $i = 1, \ldots, k$ exactement m_i termes diagonaux de P sont égaux à λ_i.

Il existe donc m_i vecteurs colonnes de P qui sont des vecteurs propres de A associés à λ_i, comme ces vecteurs forment une famille libre, la dimension de E_{λ_i} est au moins égale à m_i.

Comme $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ et que les E_{λ_i} sont en somme directe, chacun est de dimension m_i

$(\dim(E_{\lambda_i}) = m_i)$

Réciproquement, si pour tout i, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$, alors leurs somme directe est $\mathbb{R}^n$

On peut constituer une base de $\mathbb{R}^n$ en choisissant une base dans chaque E_{λ_i}

• Remarque : Toutes les matrices ne sont pas toujours diagonalisable.

Scanned by CamScanner

Théorème : Soit A une matrice admettant n valeurs propres toutes distinctes. Alors A est diagonalisable.

• **preuve :** Nous allons montrer, par récurrence sur k, que si $v_1, v_2, \dots, v_k$ sont des vecteurs propres associées à des vecteurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ toute distincte alors : $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une famille libre :

i.e. $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

→ C'est vrai pour $k = 1$, puisque par définition, un vecteur propre est non nul.

Supposons que c'est vraie à l'ordre $(k-1)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, v_k$ des vecteurs propres associés et supposons que $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{\lambda=1}^{k-1} \alpha_i v_i = -\alpha_k v_k.$$

en multipliant à gauche par A, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k=1} \alpha_i \lambda_i v_i = -\alpha_k \lambda_k v_k$$

Mais on a aussi :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_k v_i = -\alpha_k \lambda_k v_k$$

Soit en soustrayant $$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0$$

d'aprés l'hypothèse de récurence à l'ordre $(k-1)$, Ceci extraire pour $i = 1, (k-1)$ $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$

donc $\alpha_i = 0$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_k$.

Mais nécéssairement $\alpha_k v_k = 0$

donc $\alpha_k = 0$, puisque $v_k \neq 0$

Supposons qu'une matrice A admette n valeurs propres toutes distincte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Pour tout $i = 1, \dots, n$. Choisissons un vecteur v_i associé

Scanned by CamScanner

à λ_i. Et d'après ce qui précède $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc une base.

Théorème : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ $i = 1, \ldots, n$ symétrique ($A = {}^tA$)

(1) toutes les valeurs propres de A sont réelles.

(2) A est diagonalisable

(3) On peut choisir comme base de vecteurs propres, une base telle que la matrice de passage P vérifie $P^{-1} = {}^tP$ (une telle base est dite orthonormé)

• Preuve : À titre d'exercice.

II. Pratique de la diagonalisation

La procédure de la diagonalisation est un peut longue mais assez simple à Pratique

1. Factoriser le polynôme caractéristique :

On calcule $\det(A - XI)$, il faut éviter le développement directe du déterminant.

On a interet à Combiner des lignes ou colonnes.

• Remarques : si le polynôme caractéristique a des racines complexes la matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Mais elle peut l'être dans $\mathbb{C}$

Nous Supposons désormés que P_A est scindé

$$P_A(X) = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

2. Trouver base de chaque sous-espace vectoriel propre E_{λ_i}

On a k systèmes à résoudre.

* Si pour l'une des λ_i le système $(A - \lambda \cdot I)v = 0$

Scanned by CamScanner

est de rang strictement inférieur à $n-n_i$ (l'ensemble des solutions est de dimension $< m_i$), alors A n'est pas diagonalisable).

Supposons que vous avez trouver une base de m_i vecteurs propres pour chaque λ. Rassemblez les vecteurs que vous avez trouvés pour haque vecteur propre, il y en a exactement n entout.

La matrice dont les colonnes sont les n vecteurs est la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle

3. Calculer l'inverse de P :

vous avez alors explicité la diagonalisation $P^{-1}AP = D$

4- Vérifier vos calculs :

Le plus simple est de calculer PDP^{-1} pour retrouver A.

. Remarque : Pour le cas des vecteurs propres de multiplicité 1 signalons comme alternative à la résolution du système linéaire, la méthode de Cofacteur à utiliser seulement dans les cas $n = 2$ ou $n = 3$.

. proposition : Soit λ une valeur propre de A de multiplicité 1.

Considéroms une ligne de $A - \lambda I$ choisie de figure que la matrice formeé des autres lignes de $(A - \lambda I)$.

Soit de rang $(n-1)$.

Le vecteur formé des Cofacteurs associés à cette ligne est un vecteur propre de A associé à λ_i.

III. Exemples :

(1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

+ Polynôme Caractéristique :

$$\det(A-XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -(X+1) & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ (X+1) & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-X \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2}-X & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-X \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1) \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-x & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= -(x+1)\left(\frac{3}{2}-X-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-X+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -(X+1)(1-X)(2-x)$$

Les valeurs propres de A sont $1, -1$ et 2.
Elles sont simples, on cherche alors un vecteur propre pour chacune.

* pour $\lambda = 1$:

$$A-I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ le rang de cette dernière matrice est $2 = 3-1$
L_3 est combinaison linéaire de L_1 et L_2
→ On calcul

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$$

Scanned by CamScanner

$$A_{3,2} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$A_{3,3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Donc une base de E est $v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- pour $\lambda = -1$:

$$A - (-1)I = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang de cette matrice est $2 = 3 - 1$

on a :

$$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = 3.$$

On choisit comme base E_{-1} le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

* pour $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

- <u>Exemple</u> : (cas où une valeur propre est multiple)

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} =$$

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{A_1} = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -2 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(-3-X) + 4$$

$$= (X+1)^2$$

donc les valeurs propres sont $-1, -1$.

$$A_1 + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A_1 + I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y = 0$$

$$\iff x = -y \quad \text{donc } \ker(A_1 + I) = \left\{ (x, -x) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

vect $\{1, 1\}$

$\dim\left(\ker(A_1 + I)\right) = 1 \neq 2$

donc A n'est pas diagonalisable

$$P_1(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ -1 & -X & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ -(1-X) & -1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(1-X)(-X) = -X(1-X)^2$$

Les valeurs propres sont 0 et 1.

pour $\lambda = 0$

$$A_2 - 0I \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad v\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$n - m = 3 - 1 = 2$

$A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

pour $\lambda = 1$.

$A_2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A_2 - I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Ker}(A - I) = \{(x, 0, -x) / x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}((1, 0, -1))$

$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A - I)) = 1 \neq 2.$

donc la matrice n'est pas diagonalisable

Exercices : (calcul des puissances d'une matrice de $M(\mathbb{R})$)

(I) On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

* Trouvez les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

* Calculer A^n pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(II) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E

f est l'endomorphisme de E de matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Scanned by CamScanner

Trouvez les valeurs propres et les sous espaces propres de f. Diagonalisez si c'est possible.

Polynôme à une indéterminée

I. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$:

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1- définition d'un polynôme formel :

Exemple :

(1) Soit M une matrice carrée, On aimerait dire que $I_n - 2M + 4M^3$ est un polynôme en M

(2) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on aimerait dire que :

$Id_{\mathbb{R}} - 2u + 4u^3$ est un polynôme en u.

on voit que l'objet important dans ces deux exemples est :

l'expression : $1 - 2X + 4X^3$

où peut importe la nature de X matrice, fonction, ...,

seule compte en fait la liste des coefficients

$(1, -2, 0, 4, , 0 \ldots)$

Ils sont en nombre fini, mais ce nombre peut être aussi grand que l'on veut.

- Définition : On appelle polynôme (formel à une indéterminée) sur le corps $\mathbb{K}$, toute suite $(a_0, a_1, \ldots a_n, 0, 0)$ d'elements de $\mathbb{K}$, qui s'annule à partir d'un certain rang :

On dit qu'il s'agit d'une suite presque nulle et les a_k sont appelés les coefficients.

1. Si tous les coefficients a_k sont nuls, on dira

Scanned by CamScanner

qu'il s'agit du polynôme nul qu'on

2. Sinon, l'ensemble : $\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ est non vide et possède un plus grand élément, noté :

deg (A) : degré de A.

c'est l'indice du dernier terme non nul.

• Remarque : le polynôme nul n'a pas de degré on écrit : $\deg(0) = -\infty$

• Définition :

- on notera $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$
- on notera $1 = (1, 0, 0 \ldots)$
- on notera $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0 \ldots)$

on notera :

$$X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

(1 à la place $(n+1)$)

* Si $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dit pour si $a_{2k+1} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

* Si $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est impair si $a_{2k} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

* un polynôme dont tous les termes sont nuls sauf un s'appelle monôme.

* Un polynôme non nul $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dit unitaire si $a_{\deg(A)} = 1$

* Le terme $a_{\deg(A)}$ s'appelle souvent le coefficient de terme de plus haut degré de A ou encore : le coefficient dominant.

→ par déf : $a_{\deg(A)} \neq 0$

Scanned by CamScanner

2. Opérations sur les polynômes formels :

a. l'addition :

Exemple : $A = (2, -1, 0, i+1, 0, 5, 0, 0, \dots)$

$B = (0, -3+i, 2, 6, 0, 0, -4, 0, 0, \dots)$

On a $A = 2(1,0,0,\dots) - 1(0,1,0,0\dots)$

$+ (i+1)(0,0,0,1,0,0\dots) + 5(0,0,0,0,0,1,0\dots)$

$= 2 - X + (1+i)X^3 + 5X^5$

et :

$B = (i-3)X + 2X^2 + 6X^3 - 4X^6$

$A+B = 2 + (i-4)X + 2X^2 + (7+i)X^3 + 5X^5 + 4X^6$

$A+B = (2; i-4, 2, 7+i, 0, 5, -4, 0, 0, \dots)$

• **Théorème :** Soient $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0\dots)$ et $B = (b_0, b_1, \dots, b_p, 0, 0\dots)$ deux polynômes, alors la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$(\forall k \in \mathbb{N})\ S_k = a_k + b_k$

et p sque nulle, le polynôme formel ainsi défini se note $A+B$

De plus on a

$\deg(A+B) \leq \max(\deg A, \deg B)$

• **preuve :**

• Si A ou B sont nuls :

Donc $A+B = A$ ou B, le résultat est évident.

• Si A et B ne sont pas nuls :

On note : $n = \deg(A)$ et $m = \deg(B)$

→ Si $k \in \mathbb{N} \mid k > \max(n,m)$

On a : $S_k = a_k + b_k = 0$

Scanned by CamScanner

(car $a_k = 0$ et $b_k = 0$)

cela prouve que $A+B$ est polynôme.

* Si $A+B=0$:

Son degré est $-\infty$ qui est inférieur à tout ce que l'on veut, aussi à $\max(n,m)$.

b. Multiplication par un scalaire :

· Théorème et Définition : Soit $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0\dots)$ un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall k \in \mathbb{N})\ m_k = \lambda a_k$ est une suite presque nulle. Le polynôme ainsi défini se note $\lambda.A$ ou λA

De plus si $\lambda \neq 0$; $\deg(\lambda A) = \deg(A)$

· Notation : On note $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes formels à coefficients dans $\mathbb{K}$.

→ Les opérations + et . vérifiant les propriétés suivantes :

Théorème :

(*) + est associative .

$(\forall A, B, C$ dans $\mathbb{K}[X])\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

(*) Le polynôme nul = 0 est l'élément neutre pour + dans $\mathbb{K}[X]$

(*) si $A \in \mathbb{K}[X]$, $(-1)A$ (noté $-A$) vérifie :

$A+(-A) = (-A)+A = 0$

En plus :

(*) $1.A = A$

(*) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

(*) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

(*) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Scanned by CamScanner

On résume ces propriétés en disant que :

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$- vectoriel.

c. Multiplication :

Exemple : $A = (a_0, a_1, a_2, 0, 0 \ldots)$

$B = (b_0, b_1, b_2, 0, 0 \ldots)$

(Càcl $A = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, $B = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$)

→ Dans le produit $A \times B$:

* Le terme de degré 0 est :

$a_0 b_0$

* Le terme de degré 1 est :

$a_0 b_1 + a_1 b_0 = \sum_{j=0}^{1} a_j b_{1-j}$

* Le terme de degré 2 est :

$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \sum_{j=0}^{2} a_j b_{2-j}$.

* Le terme d'ordre 3 est :

$a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = \sum_{j=0}^{3} a_j b_{3-j}$

* Le terme d'ordre 4 est :

$a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0$

À partir de 6 tous les termes sont nuls.

Donc $A \times B = (C_k)_{k \in \mathbb{N}}$

tel que $C_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

. Théorème et Déf :

Soient $A = (a_0, a_1, \ldots, a_m, 0, 0 \ldots)$ et $B = (b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, 0 \ldots)$ deux polynômes, la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $C_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ est presque nulle.

Scanned by CamScanner

Le polynôme ainsi défini se note :

$A \times B$ (ou AB) de plus $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

• preuve :

* Si A ou B est nul :

il est évident que (C_k) est la suite nulle et on a :

$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

(car $\deg(0) = -\infty$)

* Si non, A et B ne sont pas nuls :

On pose $n = \deg(A)$ et $m = \deg(B)$

→ $(\forall k > n+m)$ on a :

$$C_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k-m-1} a_j b_{k-j} + \sum_{j=k-m}^{k} a_j b_{k-j}$$

$\forall j \in [\![0, k-(n+1)]\!]$; on a : $j \leq k-(n+1)$

donc $m+1 \leq k-j$

c'à d $m < k-j$

d'où $b_{k-j} = 0$

Donc $\sum_{j=0}^{k-n-1} a_j b_{k-j} = 0$

$\forall j \in [\![k-m, k]\!]$, on a : $k-m \leq j$

c'à d $n < k-m \leq j$

Donc $a_j = 0$

D'où $\sum_{j=k-m}^{k} a_j b_{k-j} = 0$

Donc $(\forall k > n+m)$ $C_k = 0$

Donc $(C_k)_k$ est un polynôme et $\deg(AB) \leq n+m$

On a : $C_{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} a_j b_{n+m-j}$

Scanned by CamScanner

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{n+m-j} + a_n b_m + \sum_{j=n+1}^{n+m} a_j b_{n+m-j}$$

$j \leqslant n-1$

$-j \geqslant 1-n$

$-j+n+m \geqslant 1+m$

$\Rightarrow b_{n+m-j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot b_{n+m-j} = 0$

de même si $j \geqslant n+1$, alors $j > n$

d'où $\sum_{j=n+1}^{n+m} a_j b_{n+m-j} = 0$

Donc $C_{n+m} = a_n \times b_m \neq 0$

d'où $\deg(A \times B) = n+m$

. <u>Théorème</u> : Les lois internes + et × sur $\mathbb{K}[X]$ ont les propriétés suivantes :

* × est associative
* × possède le polynôme 1 comme élément neutre.
* × est distributive (à gauche et à droite) sur +
* × est Commutative

De plus on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ X^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

On notera $X^0 = 1$, par Convention.

→ On résume ces propriétés en disant que :
$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.

. <u>Corollaire</u> : (Explication de $\mathbb{K}[X]$)

Soit $n \in \mathbb{N}$, tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A) \leqslant n$ s'écrit de façon unique comme Combinaison linéaire des X^k pour $k \in [\![0, n]\!]$

$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $(a_k \in \mathbb{K}, \forall k \in [\![1, n]\!])$

Scanned by CamScanner

Notation :

Si $A \in \mathbb{K}[X]$, sans préciser son degré, on écrira parfois : $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$

preuve : * Pour l'existance :

Soit $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0 \ldots)$ un polynôme formel.

On a $A = a_0 (1, 0, 0, \ldots) + a_1 (0, 1, 0, 0, \ldots)$

$+ a_2 (0, 0, 1, 0, 0 \ldots) + \ldots + a_n (0, 0, \ldots, \underset{\text{place } (n+1)}{1}, 0, 0 \ldots)$

$= a_0 1 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$

* Pour l'unicité :

On Suppose qu'on a

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

par différence on calcule.

· Théorème : (propriétés de l'anneau $\mathbb{K}[X]$)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

1. Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors $A \times B \neq 0$
2. Si $AC = AB$ et $A \neq 0$ alors $C = B$.
3. Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont $a.1$, $a \in \mathbb{K}^*$

· preuve :

1. Comme $\deg(A \times B) = \deg(A) + \deg(B)$.

on a le résultat

2. Si $AB = AC$

alors. $AB - AC = 0$

$A(B-C) = 0$ Donc : $\begin{cases} A = 0 \text{ ou } B - C = 0 \\ B = C \quad (\text{car } A \neq 0) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

3. Dire que A est inversible dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$, c'est à dire qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A \times B = 1$

d'ou $\deg(A) + \deg(B) = 0$

donc : $\deg(A) = \deg(B) = 0$

Soit $A = a.1$ et $B = a'.1$

d'ou = $AB = a.a'.1$

càd $aa'1 = 1$.

ce qui implique que $aa' = 1$.

et $(a, a') \neq (0,0)$

Donc $a' = \frac{1}{a}$

D'où le résultat.

• Remarque : Le dernier théorème implique que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau integré.

d. Composition :

Rappelons que $X = (0,1,0,0,\dots)$ est un polynôme particulier. Ce qui n'est pas une variable et il n'a pas de Sens de faire par exemple $X = 2$.

• Définition. Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ on notera, $A \circ B$ où très couramment $A(B)$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k B^k$

→ En particulier

On a : $A \circ X = A(X) = A$.

• Remarque:

Un polynôme n'est pas une fonction, Ainsi, l'écriture $A(X) = A$ est tout à fait correcte et rigoureuse, contrairement à l'écriture "$f(x) = f$" si f est une

Scanned by CamScanner

$f^{ct} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (par exemple)

• **Théorème :** Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non constant. Alors :

$$\deg(A \circ B) = \deg(A) \times \deg(B).$$

• **Remarque :** Si B est constante, on a : $A(B)$ est un scalaire qui peut être nul : son degré est 0 ou $-\infty$.

3. Le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$:

• **Théorème et Déf :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{A \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(A) \leqslant n\}$ des polynômes de degré $\leqslant n$ est stable par $+$ et par multiplication par un scalaire.

C'est à dire, stable par combinaison linéaire.

→ On dit que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X]; +; \cdot)$

• Remarques :

(1) $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par $\times$

(2) L'ensemble des polynômes de degré $\leqslant 0$ est $\mathbb{K}_0[X] = \{(c, 0, 0, \ldots) \mid c \in \mathbb{K}\}$

C'est l'ensemble des polynômes constants.

(3) Abusivement, on peut identifier $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_0[X]$

(4) $\mathbb{K}_1[X]$ est l'espace des polynômes affines càd de la forme $aX+b$

(5) $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et on a $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$

II. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:

1. Multiples et diviseurs :

Scanned by CamScanner

Tout comme dans $\mathbb{Z}$, on a dans n'importe quel anneau commutatif, on dispose de la notion de divisibilité et donc d'une arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Déf. : Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que A/B (A divise B) quand il existe $C \in \mathbb{K}[X]$, tel que $AC = B$.

on dit aussi que B est un multiple de A.

⚠ Remarque : on peut avoir A/B et B/A sans pour autant avoir $A = B$.

Exemple : $A = X$ et $B = 2X$, on a A/B et B/A mais $A \neq B$.

→ Si A/B et B/A, alors $A = uB$, $u \in \mathbb{K}^*$, On dit que A et B sont associés.

2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:

théorème : pour tout polynôme A et B dans $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynome de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$\boxed{A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg B}$$

• preuve :

1°/ On démontre l'existance.

On procède par récurence forte sur n

• Si $A = 0$: Il suffit de prendre $(Q, R) = (0, 0)$

• Si non : Considéroms la propriété

(P_n) : $(\forall A_n \in \mathbb{K}[X])$ / $\deg A = n$, $\exists (Q_n, P_n) \mathbb{K}^2[X]$ tel que : $A_n = B \cdot Q_n + R_n$ et $\deg(R_n) < \deg B$

Scanned by CamScanner

- Initialisation :

Pour $n=0$, on distingue deux cas :

→ Si $\deg B > 0$:

Dans ce cas $(Q_n, R_n) = (0, A)$

→ Si $\deg B = 0$.

càd $B \in \mathbb{K}^*$, on choisit :

$(Q, R) = \left(\frac{A}{B}, 0\right)$

- Héridité :

Supposons que pour un certain $\mathcal{P}_n$ est vraie

ainsi que $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_0$

et Considérons un polynôme A_{n+1} de degré $(n+1)$

On a : $A_{n+1} = a_{n+1} X^{n+1} + a_n X^n + \ldots + a_1 X^1 + a_0$

Soit $p = \deg(B)$. On a :

$B = b_p X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \ldots + b_0$

Considérons le polynôme

$P = A_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B$, dont le degré est :

$m = \deg P < n+1$

D'après l'hypothèse de récurence forte

$\exists (Q_m, R_m) \in \mathbb{K}^2[X] \;/\; P = BQ_m + R_m$

et $\deg R_m < \deg B$

Donc $A_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B = BQ_m + R_m$

càd : $A_{n+1} = \left(Q_m + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}\right) B + R_m$

on choisit : $\begin{cases} Q_{n+1} = Q_m + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} \cdot B \\ R_{n+1} = R_m \;/\; \deg R_{n+1} = \deg R_m < \deg B \end{cases}$

2°/ Unicité. On suppose qu'il existent (Q_1, R_1)

et (Q_2, R_2) / $A = B \cdot Q_1 + R_1 = B \cdot Q_2 + R_2$

Scanned by CamScanner

$\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$

Donc on a :

$B(Q_1 - Q_2) = (R_2 - R_1)$

Ce qui implique :

$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1)$

or $\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg B$

donc $\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) < \deg B$

Comme $B \neq 0$, $\deg B \in \mathbb{N}$.

d'où $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$ ce qui est absurde

Donc $Q_1 = Q_2$, si bien que $R_1 = R_2$.

* <u>Mise en place de la division Euclidienne</u> :

Exemple : $A = X^3 + X^2 - 1$

et $B = X - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X^2 - 1 & X - 1 \\ \hline -X^3 + X^2 & X^2 + 2X + 2 \\ \hline 0 + 2X^2 - 1 & \\ -2X^2 + 2X & \\ \hline 0 + 2X - 1 & \\ -2X + 2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc $A = B(X^2 + 2X + 2) + 1$.

<u>Remarque</u> : Il est évident, mais on le sait déjà dans $\mathbb{Z}$ que si A et B deux polynômes avec $B \neq 0$:

$B/A \iff R = 0$, avec reste de la D.E de A par B

Scanned by CamScanner

III. PGCD et PPCM de polynômes

Déf : Soient A et B deux polynômes, dont l'un au moins est non nul.

On appelle PGCD de A et B tout polynôme qui divise à la fois A et B et de degré maximal.

→ Par Convention :

Si $A = B = 0$, on dira que le PGCD de A et B est 0.

• **Théorième** (Algorithme d'Euclide)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$

on note R le reste de la division euclidienne de A par B. Alors tout diviseur commun de A et B est un diviseur commun de B et R.

Preuve : "Exactement comme dans $\mathbb{Z}$"

• **Corollaire** : (description des PGCD)

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$, l'un des deux au moins n'étant pas nul.

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ qui divise à la fois A et B, Alors P divise n'importe quel PGCD de A et B.
- Si D_1 et D_2 sont deux PGCD de A et B alors : $D_2 = \lambda . D_1 \;/\; \lambda \in \mathbb{K}^*$

• **Notation** : Si A ou B est non nul.

$\exists!$ PGCD de A et B, unitaire dans ce cas on note : PGCD (A, B) ou $A \wedge B$.

• **preuve** (corollaire) :

Scanned by CamScanner

• En appliquant de proche l'algorithme d'Euclide, On Creé une suite de polynômes : $R_0, R_1, \ldots$

où R_0 est le reste de la D.E de A par B

R_1 est le reste de la D.E de B par R_0

et R_i est le reste de la D.E de R_{i-1} par R_{i-1}

$(i \geq 2)$

Puisque $\deg R_i < \deg R_{i-1}$

Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que :

$R_{i-1} \neq 0$ et $R_i = 0$

→ D'aprés le théorème précédant les diviseurs communs de A et B sont ceux de R_{i-1} et R_i.

Ce qui prouve que R_{i-1} est PGCD de A et B

• On applique ce qui précède à D_1 et D_2 pour arriver à D_1/D_2 et D_2/D_1 d'où :

$(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*)$; $D_2 = \lambda D_1$

Déf$_2$: Soient A et B deux polynômes tous les deux non nuls.

On appelle PPCM de A et B tout polynôme qui est multiple commun de A et B et que Soit de degré maximal.

→ Par Convension si $A = 0$ ou $B = 0$, on dira que le PPCM de A et B est 0.

• <u>Théorème$_2$</u> : Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$ non nuls.

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est à la fois multiple de n'importe quel PPCM de A et B.
- Si M_1 et M_2 sont deux PPCM de A et B.

Scanned by CamScanner

alors : $M_2 = \lambda . M_1$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Notation : Si A et B sont non nuls.

$\exists !$ PPCM de A et B , unitaire celui qu'on note :

PPCM (A, B) ou $A \vee B$

- Théorème$_3$: (formule de Complément).

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, unitaires (donc non nuls) si on note : $D = A \wedge B$ et $M = A \vee B$. alors $AB = DM$.

Déf$_{1.3}$: On dit que deux polynômes A et B sont premiers entre eux quand un de leur PGCD est 1.

- Théorème$_4$: (Bezout)

Deux polynômes de A et B sont premiers entre eux si et seulement si : $\exists$ des polynômes u et v tels que : $AU + BV = 1$

Remarque :

Scanned by CamScanner